BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005

О ГЛОБАЛЬНОЙ КЛАССИЧЕСКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА СОБОЛЕВА.

А.Ф.ЯГУБОВА

Бакинский Государственный Университет

Работа посвящена изучению вопроса глобального существования классического решения одной одномерной несамосопряженной смешанной задачи для одного класса полулинейных псевдогиперболических уравнений четвертого порядка типа Соболева. После применения метода, аналогичного схеме обычного метода Фурье, решение исходной задачи сведено к нахождению неподвижной точки некоторого нелинейного оператора в подходящим образом выбранном банаховом пространстве. Далее, после получения нескольких априорных оценок для классических решений изучаемой смешанной задачи, доказана теорема существования в целом классического решения.

В работе изучаются вопросы существования и единственности классического решения следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x)-u_{xx}(t,x)-\alpha\cdot u_{ttxx}(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x), \\ \qquad u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x),u_{txx}(t,x)) \quad (0\le t\le T,\ 0\le x\le 1), & (1) \\ u(0,x)=\varphi(x) \ \ (0\le x\le 1), \quad u_t(0,x)=\psi(x) \ \ (0\le x\le 1), & (2) \\ u(t,0)=0 \ \ (0\le t\le T), \qquad u_x(t,0)=u_x(t,1) \ \ (0\le t\le T), & (3) \end{cases}$$

где $\alpha > 0$ – фиксированное число; $0 < T < +\infty$; F, φ, ψ – заданные функции, а $u(t,x)$ – искомая функция, причём под классическим решением задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, непрерывную в замкнутой области $[0,T]\times[0,1]$ вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющую всем условиям (1)-(3) в обычном смысле.

В данной работе существенно будем пользоваться следующими двумя известными фактами:

Лемма 1 (см. [1], стр. 297). Последовательности

$$_0(x) = x,\ldots, \quad {}_{2k-1}(x) = x\cos 2\pi kx, \quad {}_{2k}(x) = \sin 2\pi kx, \ldots \tag{4}$$

и

$$_0(x) = 2,\ldots, \quad {}_{2k-1}(x) = 4\cos 2\pi kx, \quad {}_{2k}(x) = 4(1-x)\sin 2\pi kx, \ldots \tag{5}$$

образуют биортогональную в $L_2(0,1)$ систему функций.

Теорема 1 (см. [1], стр. 298-299). Последовательность (4) образует базис в пространстве $L_2(0,1)$.

Далее, так как система (4) образует базис в пространстве $L_2(0,1)$, а системы (4) и (5) образуют биортогональную в $L_2(0,1)$ систему функций, то очевидно, что каждое классическое решение $u(t,x)$ задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \quad _k(x), \tag{6}$$

где

$$u_k(t)=\int_0^1 u(t,x) \quad _k(x)dx \quad (k=0,1,...). \tag{7}$$

После применения метода, аналогичного схеме метода Фурье, нахождение функций $u_k(t)$ $(k=0,1,\ldots)$ сведено к решению следующей счетной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$u_0(t)=\varphi_0+\psi_0\cdot t+2\int_0^t\int_0^1 (t-\tau) \quad (u(\tau,x))dxd\tau \quad (t\in[0,T]), \tag{8}$$

$$u_{2k-1}(t)=\varphi_{2k-1}\cdot\cos\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t+\psi_{2k-1}\cdot\frac{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}{2\pi k}\times$$
$$\times\sin\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t+\frac{2}{\pi k\cdot\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}\cdot\int_0^t\int_0^1 \quad (u(\tau,x))\cos 2\pi kx\times$$
$$\times\sin\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}(t-\tau)dxd\tau \; (k=1,2,...;\; t\in[0,T]), \tag{9}$$

$$u_{2k}(t)=-\varphi_{2k-1}\cdot\frac{1}{(1+4\alpha\pi^2k^2)^{3/2}}\cdot t\cdot\sin\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t+\varphi_{2k}\times$$
$$\times\cos\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t-\psi_{2k-1}\cdot\frac{1}{2\pi k\cdot(1+4\alpha\pi^2k^2)}\times$$
$$\times\left\{\frac{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}{2\pi k}\cdot\sin\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t-t\cdot\cos\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t\right\}+$$
$$+\psi_{2k}\cdot\frac{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}{2\pi k}\cdot\sin\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t-\frac{8\alpha}{(1+4\alpha\pi^2k^2)^{3/2}}\times$$
$$\times\int_0^t\int_0^1 \quad (u(\tau,x))\cos 2\pi kx\cdot\sin\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}(t-\tau)dxd\tau-$$
$$-\frac{4}{\pi k\cdot(1+4\alpha\pi^2k^2)^2}\cdot\int_0^t\left[\int_0^\tau\int_0^1 \quad (u(\sigma,x))\cos 2\pi kx\times\right.$$

$$\times \sin \frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2 k^2}}(\tau-\sigma)dxd\sigma \Bigg] \cdot \sin \frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2 k^2}}(t-\tau)d\tau +$$

$$+\frac{2}{\pi k \cdot \sqrt{1+4\alpha\pi^2 k^2}} \cdot \int_0^t \int_0^1 (1-x) \ \ (u(\tau,x)) \sin 2\pi k x \times$$

$$\times \sin \frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2 k^2}}(t-\tau)dxd\tau \quad (k=1,2,...;\ t\in[0,T]), \qquad (10)$$

где

$$\varphi_k \equiv \int_0^1 \varphi(x) X_k(x)dx, \qquad \psi_k \equiv \int_0^1 \psi(x) X_k(x)dx \quad (k=0,1,\ldots), \qquad (11)$$

$$(u(t,x)) \equiv F(t,x,u(t,x),u_t(t,x),u_x(t,x),u_{tx}(t,x),u_{xx}(t,x),u_{txx}(t,x)). \qquad (12)$$

Исходя из определения классического решения задачи (1)-(3) легко доказывается следующая

Лемма 2. Если $u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) X_k(x)$ – любое классическое решение задачи (1)-(3), то функции $u_k(t)$ $(k=0,1,...)$ удовлетворяют системе (8)-(10).

Далее, с целью изучения вопроса существования классического решения задачи (1)-(3), при предположениях

$$(u(t,x)) \in C([0,T]\times[0,1]), \ \frac{\partial}{\partial x}\{\ \ (u(t,x))\} \in C([0,T];L_2(0,1)), \qquad (13)$$

$$(u(t,x))\big|_{x=0} = 0 \quad \forall t\in[0,T], \qquad (14)$$

преобразуем систему (8)-(10), после интегрирования по частям по x один раз в правых частях (9) и (10), к виду:

$$u_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 \cdot t + 2\int_0^t \int_0^1 (t-\tau) \ \ (u(\tau,x))dxd\tau \ \ (t\in[0,T]), \qquad (15)$$

$$u_{2k-1}(t) = \varphi_{2k-1} \cdot \cos \frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2 k^2}} t + \psi_{2k-1} \cdot \frac{\sqrt{1+4\alpha\pi^2 k^2}}{2\pi k} \times$$

$$\times \sin \frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2 k^2}} t - \frac{1}{\pi^2 k^2 \cdot \sqrt{1+4\alpha\pi^2 k^2}} \cdot \int_0^t \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\{\ \ (u(\tau,x))\} \cdot \sin 2\pi k x \times$$

$$\times \sin \frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2 k^2}}(t-\tau)dxd\tau \quad (k=1,2,...;\ t\in[0,T]), \qquad (16)$$

$$
\begin{aligned}
u_{2k}(t) = &-\varphi_{2k-1}\cdot\frac{1}{(1+4\alpha\pi^2k^2)^{3/2}}\cdot t\cdot\sin\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t+\\
&+\varphi_{2k}\cdot\cos\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t-\psi_{2k-1}\cdot\frac{1}{2\pi k\cdot(1+4\alpha\pi^2k^2)}\times\\
&\times\left\{\frac{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}{2\pi k}\cdot\sin\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t-t\cdot\cos\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t\right\}+\\
&+\psi_{2k}\cdot\frac{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}{2\pi k}\cdot\sin\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}t+\frac{4\alpha}{\pi k\cdot(1+4\alpha\pi^2k^2)^{3/2}}\times\\
&\times\int_0^t\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\{\ \ (u(\tau,x))\}\cdot\sin 2\pi kx\cdot\sin\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}(t-\tau)dxd\tau+\\
&+\frac{2}{\pi^2k^2\cdot(1+4\alpha\pi^2k^2)^2}\cdot\int_0^t\left[\int_0^\tau\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\{\ \ (u(\sigma,x))\}\cdot\sin 2\pi kx\times\right.\\
&\left.\times\sin\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}(\tau-\sigma)dxd\sigma\right]\cdot\sin\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}(t-\tau)d\tau+\\
&+\frac{1}{\pi^2k^2\cdot\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}\cdot\int_0^t\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\{(1-x)\ \ (u(\tau,x))\}\cdot\cos 2\pi kx\times\\
&\times\sin\frac{2\pi k}{\sqrt{1+4\alpha\pi^2k^2}}(t-\tau)dxd\tau\quad(k=1,2,...;\ t\in[0,T]).
\end{aligned}\tag{17}
$$

Теперь, для полноты изложения, приведем следующие две теоремы, анонсированные в [2] и полностью доказанные в [3]:

Теорема 2. Пусть

1. $F(t,x,u_1,\dots,u_6)\in C([0,T]\times[0,1]\times(-\infty,\infty)^6)$.
2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,1]\times[-R,R]^6$

$$\left|F(t,x,u_1,\dots,u_6)-F(t,x,\tilde u_1,\dots,\tilde u_6)\right|\le C_R\cdot\sum_{i=1}^{6}\left|u_i-\tilde u_i\right|,$$

где $C_R>0$ – постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного классического решения.

Теорема 3. Пусть

1. $\varphi(x)\in C^{(2)}([0,1]),\ \varphi'''(x)\in L_2(0,1)$ и
   $\varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=\varphi'(1),\ \varphi''(0)=0$;
   $\psi(x)\in C^{(2)}([0,1]),\ \psi'''(x)\in L_2(0,1)$ и
   $\psi(0)=0,\ \psi'(0)=\psi'(1),\ \psi''(0)=0$.

2. $F(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)$, $F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)$ $(i=\overline{0,6}) \in C([0,T]\times[0,1]\times(-\infty,\infty)^6)$
.

3. $F(t,0,0,0,\xi_3,\xi_4,0,0)=0 \quad \forall t\in[0,T]$ и $\xi_3,\xi_4 \in(-\infty,\infty)$.

Тогда существует в малом классическое решение задачи (1)-(3).

Замечание 1. Так как из условия 2 теоремы 3 следует выполнение всех условий теоремы 2, то при условиях теоремы 3 классическое решение задачи (1)-(3) не только существует в малом, но и оно единственное в целом.

А теперь докажем следующую теорему (анонсированную в [2]) о существовании в целом классического решения задачи (1)-(3).

Теорема 4. Пусть

1. Выполнены все условия теоремы 3.

2. В $[0,T]\times[0,1]\times(-\infty,\infty)^6$

$$\left|F(t,x,u_1,\ldots,u_6)\right| \le C\cdot(1+|u_1|+\cdots+|u_6|), \tag{18}$$

где $C>0$ - постоянная.

3. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,1]\times[-R,R]^4\times(-\infty,\infty)^2$

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)\right| \le C_R\cdot(1+\xi_5^2+\xi_6^2) \ (i=0,1,2), \tag{19}$$

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)\right| \le C_R\cdot(1+|\xi_5|+|\xi_6|) \ (i=3,4), \tag{20}$$

$$\left|F_{\xi_i}(t,\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_6)\right| \le C_R \ (i=5,6), \tag{21}$$

где $C_R>0$ - постоянная.

Тогда задача (1)-(3) имеет единственное классическое решение.

Доказательство. По теореме 3 существует по крайней мере в малом классическое решение $u(t,x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_k(x)X_k(x)$ задачи (1)-(3), которое, в силу замечания 1, единственное в целом, причем в силу леммы 2, функции $u_k(t)$ $(k=0,1,\ldots)$ удовлетворяют системе (8)-(10). А как видно из процесса доказательства теоремы 3, приведенного в депонированной работе [3], для доказательства существования и в целом классического решения задачи (1)-(3) достаточно показать, что всевозможные классические решения задачи (1)-(3), принадлежащие пространству $B_{2,2,T}^{3,3}$ (см. [4]), априори ограничены в $B_{2,2,T}^{3,3}$.

Итак, пусть $u(t,x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_k(t)X_k(x)$ – любое классическое решение задачи (1)-(3), принадлежащее пространству $B_{2,2,T}^{3,3}$. Из систем (8)-(10) получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^{2,2}_{2,2,t}} \le a_0 + b_0 \cdot \int_0^t \int_0^1 \{\mathsf{F}(u(\tau,x))\}^2 dx d\tau, \tag{22}$$

где пространство $B^{3,3}_{2,2,T}$ определено в [4], оператор F определен соотношением (12) и

$$a_0 \equiv 6\varphi_0^2 + 6\left\{1 + \frac{T^2}{32\alpha^3\pi^6} + \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{(\sqrt{\alpha}+T)^2}{32\alpha^4\pi^6}\right]\right\} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}(k^2 \cdot \varphi_{2k-1})^2 +$$

$$+ 12\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty}(k^2 \cdot \varphi_{2k})^2 + 2(3T+2) \cdot \psi_0^2 + 6\left\{\frac{1}{4\pi^4}(1 + 4\alpha\pi^2) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{128\alpha^2\pi^8}(\sqrt{1+4\alpha\pi^2} + 2\pi T)^2 + 1 + \frac{T^2}{32\alpha^3\pi^6}\right\} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty}(k^2 \cdot \psi_{2k-1})^2 + 3\left[\frac{1}{\pi^2}(1+4\alpha\pi^2) + 4\right] \cdot \sum_{k=1}^{\infty}(k^2 \cdot \psi_{2k})^2, \tag{23}$$

$$b_0 \equiv 2T\left\{\frac{1}{2\alpha^2\pi^4}\left[8\alpha\pi^4 T^2 + 9 + \frac{3}{8\alpha^3\pi^6}(4\alpha\sqrt{\alpha}\pi^2 + T)^2\right] +\right.$$

$$\left. + 16 + \frac{3}{\alpha^2\pi^4} + 6\left[\left(\frac{1}{\alpha\pi^3} + \frac{T}{4\alpha^2\sqrt{\alpha\pi^5}}\right)^2 + \frac{1}{\alpha^2\pi^4}\right]\right\}. \tag{24}$$

Из (22), пользуясь обозначением (12) и неравенством (18), получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^{2,2}_{2,2,t}} \le a_0 + 7b_0 \cdot C^2 \cdot \int_0^1 \left\{1 + \int_0^1 u^2(\tau,x)dx + \int_0^1 u_\tau^2(\tau,x)dx + \int_0^1 u_x^2(\tau,x)dx +\right.$$

$$\left. + \int_0^1 u_{\tau x}^2(\tau,x)dx + \int_0^1 u_{xx}^2(\tau,x)dx + \int_0^1 u_{\tau xx}^2(\tau,x)dx\right\}d\tau. \tag{25}$$

Отсюда, пользуясь структурой пространства $B^{2,2}_{2,2,T}$, получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^{2,2}_{2,2,t}} \le a_0 + 7b_0 \cdot C^2 \cdot T + 7b_0 \cdot C^2 \cdot \{2\pi^2(1+2\pi)^2 + 16\pi^2(2+3\pi^2)\} \cdot \int_0^t \|u\|^2_{B^{2,2}_{2,2,\tau}} d\tau. \tag{26}$$

Из (26), применив неравенство Беллмана, получаем априорную оценку:

$$\|u\|^2_{B^{2,2}_{2,2,T}} \le (a_0 + 7b_0 \cdot T \cdot C^2) \cdot \exp\{14b_0 \cdot \pi^2[(1+2\pi)^2 + 8(2+3\pi^2)] \cdot C^2 \cdot T\} \equiv R_0^2. \tag{27}$$

В свою очередь, из априорной оценки (27) получаем справедливость следующих априорных оценок:

$$\|u(t,x)\|_{C(\overline{Q}_T)} \le R_1, \qquad \|u_x(t,x)\|_{C(\overline{Q}_T)} \le R_1,$$

$$\|u_t(t,x)\|_{C(\overline{Q}_T)} \le R_1, \quad \|u_{tx}(t,x)\|_{C(\overline{Q}_T)} \le R_1; \tag{28}$$

$$\int_0^1 u_{xx}^2(t,x)dx \le R_1^2, \quad \int_0^1 u_{txx}^2(t,x)dx \le R_1^2 \quad \forall t \in [0,T], \tag{29}$$

где $Q_T \equiv (0,T)\times(0,1)$.

Далее, так как для функции $u(t,x) \in B_{2,2,T}^{3,3}$ выполнены все условия (13), (14), то очевидно, что функции $u_k(t) = \int_0^1 u(t,x) \mathfrak{X}_k(x) dx$ $(k = 0,1,...)$ удовлетворяют не только системе (8)-(10), но и системе (15)-(17). Тогда из системы (15)-(17) получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u\|_{B_{2,2,t}^{3,3}}^2 \le \tilde{a}_0 + \tilde{b}_0 \cdot \int_0^t \int_0^1 \{F(u(\tau,x))\}^2 dx d\tau + \tilde{c}_0 \cdot \int_0^t \int_0^1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [F(u(\tau,x))] \right\}^2 dx d\tau, \tag{30}$$

где

$$\tilde{a}_0 \equiv 6\varphi_0^2 + 6\left\{1 + \frac{T^2}{32\alpha^3\pi^6} + \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{(\sqrt{\alpha}+T)^2}{32\alpha^4\pi^6}\right]\right\} \cdot \sum_{k=1}^{\infty}(k^3 \cdot \varphi_{2k-1})^2 +$$

$$+12\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty}(k^3 \cdot \varphi_{2k})^2 + 2(3T+2)\cdot\psi_0^2 + 6\left\{\frac{1}{4\pi^4}(1+4\alpha\pi^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{128\alpha^2\pi^8}(\sqrt{1+4\alpha\pi^2} + 2\pi T)^2 + 1 + \frac{3T^2}{32\alpha^3\pi^6}\right\} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty}(k^3 \cdot \psi_{2k-1})^2 + 3\left[\frac{1}{\pi^2}(1+4\alpha\pi^2) + 4\right] \cdot \sum_{k=1}^{\infty}(k^3 \cdot \psi_{2k})^2, \tag{31}$$

$$\tilde{b}_0 \equiv 2T\left\{4T^2 + \frac{3}{2\alpha\pi^6} + 8 + \frac{3}{2\alpha^2\pi^6}\right\}, \tag{32}$$

$$\tilde{c}_0 \equiv 6T \cdot \left\{\frac{5}{8\alpha\pi^6} + \frac{1}{64\alpha^4\pi^{12}}(4\alpha\sqrt{\alpha}\pi^2 + T)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{8\alpha^2\pi^6} + \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{1}{\alpha\pi^3} + \frac{T}{4\alpha^2\sqrt{\alpha}\pi^5}\right)^2\right\}. \tag{33}$$

Пользуясь обозначением (12), неравенством (18) и априорными оценками (28), (29), $\forall \tau \in [0,T]$ имеем:

$$\int_0^1 \{\mathsf{F}(u(\tau,x))\}^2 dx \le 7\int_0^1 \{1+u^2(\tau,x)+u_\tau^2(\tau,x)+u_x^2(\tau,x)+$$

$$+u_{\tau x}^2(\tau,x)+u_{xx}^2(\tau,x)+u_{\tau xx}^2(\tau,x)\}dx \le 7(1+6R_1^2). \qquad (34)$$

Следовательно, $\forall t\in[0,T]$:

$$\int_0^t\int_0^1 \{\mathsf{F}(u(\tau,x))\}^2 dx\,d\tau \le 7(1+6R_1^2)\cdot T\ . \qquad (35)$$

Далее, пользуясь явным представлением $\frac{\partial}{\partial x}[\mathsf{F}(u(\tau,x))]$, априорными оценками (28) и для $R=R_1$ оценками (19)-(21), легко получить, что $\forall\tau\in[0,T]$ и $x\in[0,1]$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}[\mathsf{F}(u(\tau,x))]\right| \le R_2+R_3\cdot\{|u_{xx}(\tau,x)|+|u_{\tau xx}(\tau,x)|+u_{xx}^2(\tau,x)+$$

$$+|u_{xx}(\tau,x)|\cdot|u_{\tau xx}(\tau,x)|+u_{\tau xx}^2(\tau,x)+|u_{xxx}(\tau,x)|+|u_{\tau xxx}(\tau,x)|\},\quad (36)$$

где $R_2>0, R_3>0$ – некоторые постоянные.

Из (36), пользуясь априорными оценками (29), получаем, что $\forall\tau\in[0,T]$:

$$\int_0^1\left\{\frac{\partial}{\partial x}[\mathsf{F}(u(\tau,x))]\right\}^2 dx \le 8\left\{R_2^2+R_3^2\cdot\left[\int_0^1 u_{xx}^2(\tau,x)dx+\int_0^1 u_{\tau xx}^2(\tau,x)dx+\right.\right.$$

$$+\int_0^1 u_{xx}^4(\tau,x)dx+\int_0^1 u_{xx}^2(\tau,x)\cdot u_{\tau xx}^2(\tau,x)dx+\int_0^1 u_{\tau xx}^4(\tau,x)dx+\int_0^1 u_{xxx}^2(\tau,x)dx+$$

$$\left.\left.+\int_0^1 u_{\tau xxx}^2(\tau,x)dx\right]\right\}\le 8(R_2^2+2R_3^2\cdot R_1^2)+8R_3^2\cdot\left[\int_0^1 u_{xx}^4(\tau,x)dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^1 u_{xx}^2(\tau,x)\cdot u_{\tau xx}^2(\tau,x)dx+\int_0^1 u_{\tau xx}^4(\tau,x)dx+2\cdot 48\pi^4(3+2\pi^2)\|u\|^2_{B^{3,3}_{2,2,\tau}}\right].\ (37)$$

Далее, пользуясь структурой пространств $B^{2,2}_{1,1,T}$ и $B^{3,3}_{2,2,T}$ (см. [4]) и априорными оценками (29), получаем, что $\forall\tau\in[0,T]$:

$$\int_0^1 u_{xx}^4(\tau,x)dx=\int_0^1 u_{xx}^2(\tau,x)\cdot u_{xx}^2(\tau,x)dx\le$$

$$\le(1+2\pi)^2\cdot\|u\|^2_{B^{2,2}_{1,1,\tau}}\cdot\int_0^1 u_{xx}^2(\tau,x)dx\le(1+2\pi)^2\cdot\frac{\pi^2}{2}\cdot\|u\|^2_{B^{3,3}_{2,2,\tau}}\cdot R_1^2,\quad (38)$$

$$\int_0^1 u_{xx}^2(\tau,x)\cdot u_{\tau xx}^2(\tau,x)dx\le(1+2\pi)^2\cdot\|u\|^2_{B^{2,2}_{1,1,\tau}}\cdot\int_0^1 u_{\tau xx}^2(\tau,x)dx\le(1+2\pi)^2\cdot\frac{\pi^2}{2}\cdot\|u\|^2_{B^{3,3}_{2,2,\tau}}\cdot R_1^2,\ (39)$$

$$\int_0^1 u_{\tau xx}^4(\tau,x)dx = \int_0^1 u_{\tau xx}^2(\tau,x)\cdot u_{\tau xx}^2(\tau,x)dx \le$$

$$\le (1+2\pi)^2 \cdot \|u\|^2_{B^{2,2}_{1,1,\tau}} \cdot \int_0^1 u_{\tau xx}^2(\tau,x)dx \le (1+2\pi)^2 \cdot \frac{\pi^2}{2} \cdot \|u\|^2_{B^{3,3}_{2,2,\tau}} \cdot R_1^2. \quad (40)$$

Теперь, пользуясь оценками (38)-(40), из (37) получаем, что $\forall \tau \in [0,T]$:

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x}[F(u(\tau,x))] \right\}^2 dx \le 8(R_2^2 + 2R_1^2 \cdot R_3^2) + 8R_3^2 \times$$

$$\times \left\{ (1+2\pi)^2 \cdot \frac{3\pi^2}{2} \cdot R_1^2 + 96\pi^4(3+2\pi^2)\cdot R_3^2 \right\} \cdot \|u\|^2_{B^{3,3}_{2,2,\tau}}, \quad (41)$$

следовательно

$$\int_0^t \int_0^1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x}[F(u(\tau,x))] \right\}^2 dx d\tau \le 8(R_2^2 + 2R_1^2 \cdot R_3^2)\cdot T +$$

$$+12\pi^2 \cdot R_3^2 \cdot [(1+2\pi)^2 \cdot R_1^2 + 64\pi^2(3+2\pi^2)] \cdot \int_0^1 \|u\|^2_{B^{3,3}_{2,2,\tau}} d\tau. \quad (42)$$

В силу оценок (35) и (42) из (31) получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\|u\|^2_{B^{3,3}_{2,2,t}} \le \widetilde{a}_0 + 7\widetilde{b}_0(1+6R_1^2)\cdot T + 8\widetilde{c}_0 \cdot (R_2^2 + 2R_1^2 \cdot R_3^2)\cdot T +$$

$$+12\widetilde{c}_0\pi^2 \cdot R_3^2 \cdot [(1+2\pi)^2 \cdot R_1^2 + 64\pi^2(3+2\pi^2)] \cdot \int_0^1 \|u\|^2_{B^{3,3}_{2,2,\tau}} d\tau. \quad (43)$$

Из (43), применив неравенство Беллмана, получаем:

$$\|u\|^2_{B^{3,3}_{2,2,T}} \le \{\widetilde{a}_0 + 7\widetilde{b}_0 \cdot (1+6R_1^2)\cdot T + 8\widetilde{c}_0 \cdot (R_2^2 + 2R_1^2 \cdot R_3^2)\cdot T\} \times$$

$$\times \exp\{12\widetilde{c}_0\pi^2 \cdot R_3^2 \cdot [(1+2\pi)^2 \cdot R_1^2 + 64\pi^2(3+2\pi^2)]\cdot T\} \equiv R_4^2. \quad (44)$$

Таким образом, всевозможные классические решения $u(t,x)$ задачи (1)-(3), принадлежащие пространству $B^{3,3}_{2,2,T}$, априори ограничены в $B^{3,3}_{2,2,T}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. –**ДУ,** 1977, т.13, №2, с.294-304.
2. Худавердиев К.И., Ягубова А.Ф. Исследование классического решения одной несамосопряженной одномерной смешанной задачи для одного класса нелинейных уравнений длинных волн. II. –Вестник Бакинского Государственного Университета, серия физико-математических наук, 2002 г., № 3, с.90-95.
3. Ягубова А.Ф. Исследование классического решения одной несамосопряженной одномерной смешанной задачи для одного класса нелинейных уравнений

длинных волн. II. –Бакинский Государственный Университет, г.Баку, 2002г., 58с. (рукопись депонирована в АзНИИНТИ, г.Баку, 16.12.2002, №2767 –Аз. 02).

4. Худавердиев К.И., Исмаилов А.И. Исследование классического решения одной несамосопряженной одномерной обратной краевой задачи для одного класса полулинейных дифференциальных уравнений третьего порядка. – Бакинский Государственный Университет. Баку, 1998, 110с. (рукопись депонирована в АзНИИНТИ, Баку, 03.07.1998, №2566 – Аз. 98).

BİR SİNİF YARIM-XƏTTİ SOBOLEV TİPLİ TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN KLASSİK HƏLLİNİN QLOBAL VARLIĞI HAQQINDA

A.F.YAQUBOVA

ANNOTASİYA

İş bir sinif Sobolev tipli dördüncü tərtib psevdohiperbolik tənliklər üçün bir özünə qoşma olmayan birölçülü qarışıq məsələnin klassik həllinin qlobal varlığı məsələsinin öyrənilməsinə həsr olunmuşdur. Adi Furye metodunun sxeminə analoji olan metodu tətbiq etdikdən sonra baxılan məsələnin həlli müəyyən qeyri-xətti operatorun xüsusi olaraq seçilmiş müəyyən banax fəzasında tərpənməz nöqtəsinin tapılmasına gətirilmişdir. Sonra, öyrənilən qarışıq məsələnin klassik həlləri üçün bir neçə apriori qiymətləndirmələr almaqla klassik həllin qlobal varlığı haqqında teorem isbat edilmişdir.

ON THE GLOBAL CLASSICAL SOLVABILITY OF ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR A SOBOLEV-TYPE SEMI-LINEAR EQUATION

A.F.YAGUBOVA

ABSTRACT

This work is dedicated to the study of the global existence of classical solution for a one-dimensional non-self-adjoint mixed problem for a class of fourth order Sobolev-type semi-linear pseudo-hyperbolic equations. Using a method similar to the usual Fourier method, the original problem is reduced to the problem of finding fixed point of some nonlinear operator in properly chosen Banach space. After having obtained several apriori estimates for classical solutions of mixed problem under consideration, the author proves existence theorem in large for classical solution.